Teoria homotòpica de tipus

David Martinez Carpena

Dirigit per Dr. Carles Casacuberta

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Barcelona, 6 de febrer de 2020

Continguts

1. Teoria homotòpica de tipus
2. Tipus inductius d'ordre superior
3. Espais recobridors
4. Recerca futura

Continguts

1 Teoria homotòpica de tipus

2 Tipus inductius d'ordre superior

3 Espais recobridors

4 Recerca futura

Historia

- La teoria de tipus va ser creada per Russell entre 1902 i 1908.

Historia

- La teoria de tipus va ser creada per Russell entre 1902 i 1908.
- El 1972, Per Martin-Löf va crear la teoria de tipus intuïcionista.

Historia

- La teoria de tipus va ser creada per Russell entre 1902 i 1908.
- El 1972, Per Martin-Löf va crear la teoria de tipus intuïcionista.
- El nom "Homotopy Type Theory" va sorgir a partir d'una xerrada d'Awodey el 2007.

Historia

- La teoria de tipus va ser creada per Russell entre 1902 i 1908.
- El 1972, Per Martin-Löf va crear la teoria de tipus intuïcionista.
- El nom “Homotopy Type Theory” va sorgir a partir d’una xerrada d’Awodey el 2007.
- El 2009, Voevodsky va donar els detalls d’un model de la teoria de tipus amb complexos de Kan.

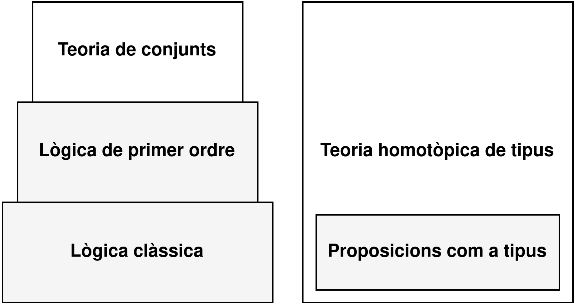
Historia

- La teoria de tipus va ser creada per Russell entre 1902 i 1908.
- El 1972, Per Martin-Löf va crear la teoria de tipus intuïcionista.
- El nom “Homotopy Type Theory” va sorgir a partir d’una xerrada d’Awodey el 2007.
- El 2009, Voevodsky va donar els detalls d’un model de la teoria de tipus amb complexos de Kan.
- Entre 2012 i 2013, Awodey, Coquand i Voevodsky van organitzar un programa de recerca anomenat “A Special Year on Univalent Foundations of Mathematics”.

Historia

- La teoria de tipus va ser creada per Russell entre 1902 i 1908.
- El 1972, Per Martin-Löf va crear la teoria de tipus intuïcionista.
- El nom "Homotopy Type Theory" va sorgir a partir d'una xerrada d'Awodey el 2007.
- El 2009, Voevodsky va donar els detalls d'un model de la teoria de tipus amb complexos de Kan.
- Entre 2012 i 2013, Awodey, Coquand i Voevodsky van organitzar un programa de recerca anomenat "A Special Year on Univalent Foundations of Mathematics".
- Els assistents de demostració més utilitzats actualment, com Coq, Agda o Lean, estan basats en alguna teoria de tipus.

Context


Teoria de conjunts
Lògica de primer ordre
Lògica clàssica
Teoria homotòpica de tipus
Proposicions com a tipus

Teories de tipus intuïcionistes

Una teoria de tipus intuïcionista és un sistema deductiu format per

- **Enunciats:**
  - Introducció d'elements $a : A$
  - Igualtat per definició $a \equiv b$
- **Regles:** Construeixen nous enunciats a partir d'anteriors.

Funcions

Definirem el tipus de les funcions a partir de les regles següents:

Funcions

Definirem el tipus de les funcions a partir de les regles següents:

1. Donats A i B dos tipus qualssevol, existeix el tipus $A \to B$.

Funcions

Definirem el tipus de les funcions a partir de les regles següents:

1. Donats A i B dos tipus qualssevol, existeix el tipus $A \to B$.
2. Donats una variable lliure x i una expressió Φ que pot contenir x, si per a tot element a de A tenim que $\Phi[a/x] : B$, llavors l'equació

   $$f(x) :\equiv \Phi$$

   ens introdueix una funció $f : A \to B$.

Funcions

Definirem el tipus de les funcions a partir de les regles següents:

1. Donats A i B dos tipus qualssevol, existeix el tipus $A \to B$.
2. Donats una variable lliure x i una expressió Φ que pot contenir x, si per a tot element a de A tenim que $\Phi[a/x] : B$, llavors l'equació
$$f(x) :\equiv \Phi$$
ens introdueix una funció $f : A \to B$.
3. Si $a : A$ i $f : A \to B$, llavors $f(a) : B$.

Funcions

Definirem el tipus de les funcions a partir de les regles següents:

1. Donats A i B dos tipus qualssevol, existeix el tipus $A \to B$.
2. Donats una variable lliure x i una expressió Φ que pot contenir x, si per a tot element a de A tenim que $\Phi[a/x] : B$, llavors l'equació

   $$f(x) :\equiv \Phi$$

   ens introdueix una funció $f : A \to B$.
3. Si $a : A$ i $f : A \to B$, llavors $f(a) : B$.
4. Donada una funció $f : A \to B$ amb equació $f(x) :\equiv \Phi$, per a tot $a : A$ es complirà

   $$f(a) \equiv \Phi[a/x] : B.$$

Famílies de tipus

Anomenarem univers U al tipus de tots els tipus.

Famílies de tipus

Anomenarem univers U al tipus de tots els tipus.

Anomenarem família de tipus a una funció amb codomini l'univers.

Famílies de tipus

Anomenarem univers U al tipus de tots els tipus.

Anomenarem família de tipus a una funció amb codomini l'univers.

Sigui A un tipus qualsevol. Podem definir una família $B : A \to \mathrm{U}$ tal que per a cada element $a : A$ existeix un tipus $B(a) : \mathrm{U}$.

Funcions dependents

Definirem el tipus de les funcions dependents amb les regles següents:

Funcions dependents

Definirem el tipus de les funcions dependents amb les regles següents:

1. Donats A un tipus qualsevol i $B : A \to \mathrm{U}$ una família, existeix el tipus $\prod_{x:A} B(x)$.

Funcions dependents

Definirem el tipus de les funcions dependents amb les regles següents:

1. Donats A un tipus qualsevol i $B : A \to \mathrm{U}$ una família, existeix el tipus $\prod_{x:A} B(x)$.
2. Donats una variable lliure x i una expressió Φ que pot contenir x, si per a tot element a de A tenim que $\Phi[a/x] : B(a)$, llavors l'equació

$$f(x) :\equiv \Phi$$

   ens introdueix una funció dependent $f : \prod_{x:A} B(x)$.

Funcions dependents

Definirem el tipus de les funcions dependents amb les regles següents:

1. Donats A un tipus qualsevol i $B : A \to \mathrm{U}$ una família, existeix el tipus $\prod_{x:A} B(x)$.
2. Donats una variable lliure x i una expressió Φ que pot contenir x, si per a tot element a de A tenim que $\Phi[a/x] : B(a)$, llavors l'equació

$$f(x) :\equiv \Phi$$

   ens introdueix una funció dependent $f : \prod_{x:A} B(x)$.
3. Si $a : A$ i $f : \prod_{x:A} B(x)$, llavors $f(a) : B(a)$.

Funcions dependents

Definirem el tipus de les funcions dependents amb les regles següents:

1. Donats A un tipus qualsevol i $B : A \to \mathrm{U}$ una família, existeix el tipus $\prod_{x:A} B(x)$.
2. Donats una variable lliure x i una expressió Φ que pot contenir x, si per a tot element a de A tenim que $\Phi[a/x] : B(a)$, llavors l'equació

$$f(x) :\equiv \Phi$$

   ens introdueix una funció dependent $f : \prod_{x:A} B(x)$.
3. Si $a : A$ i $f : \prod_{x:A} B(x)$, llavors $f(a) : B(a)$.
4. Donada una funció $f : \prod_{x:A} B(x)$ amb equació $f(x) :\equiv \Phi$, per a tot $a : A$ es complirà

$$f(a) \equiv \Phi[a/x] : B(a).$$

Productes dependents

Definirem el tipus dels productes dependents com

Productes dependents

Definirem el tipus dels productes dependents com

1. Si A és un tipus i $B : A \to \mathrm{U}$ una família, existeix $\sum_{x:A} B(x)$.

Productes dependents

Definirem el tipus dels productes dependents com

1. Si A és un tipus i $B : A \to \mathrm{U}$ una família, existeix $\sum_{x:A} B(x)$.
2. Donats $a : A$ i $b : B(a)$, podem introduir $(a, b) : \sum_{x:A} B(x)$.

Productes dependents

Definirem el tipus dels productes dependents com

1. Si A és un tipus i $B : A \to \mathrm{U}$ una família, existeix $\sum_{x:A} B(x)$.
2. Donats $a : A$ i $b : B(a)$, podem introduir $(a, b) : \sum_{x:A} B(x)$.
3. **Principi de recursió:** Sigui C un tipus qualsevol. Donat $g : \prod_{x:A}(B(x) \to C)$, existeix la funció $f : (\sum_{x:A} B(x)) \to C$ definida per l'equació

$$f((a, b)) :\equiv g(a, b).$$

Productes dependents

Definirem el tipus dels productes dependents com

1. Si A és un tipus i $B : A \to \mathrm{U}$ una família, existeix $\sum_{x:A} B(x)$.
2. Donats $a : A$ i $b : B(a)$, podem introduir $(a, b) : \sum_{x:A} B(x)$.
3. **Principi de recursió:** Sigui C un tipus qualsevol. Donat $g : \prod_{x:A}(B(x) \to C)$, existeix la funció $f : (\sum_{x:A} B(x)) \to C$ definida per l'equació
$$f((a, b)) :\equiv g(a, b).$$
4. **Principi d'inducció:** Sigui $C : (\sum_{x:A} B(x)) \to \mathrm{U}$ una família qualsevol. Donat $g : \prod_{x:A} \prod_{y:B(x)} C((x, y))$, existeix la funció $f : \prod_{w:\sum_{x:A} B(x)} C(w)$ definida per l'equació
$$f((a, b)) :\equiv g(a, b).$$

Proposicions com a tipus

Teoria de conjunts	**Teoria de tipus**
Cert	$\mathbf{1}$
Fals	$\mathbf{0}$
Negació de A	$A \to \mathbf{0}$
A i B	$A \times B$
A o B	$A + B$
A implica B	$A \to B$
A si, i només si B	$(A \to B) \times (B \to A)$
$\forall x \in A,\ B(x)$	$\prod_{x:A} B(x)$
$\exists x \in A,\ B(x)$	$\sum_{x:A} B(x)$

El tipus de les igualtats

Donats $a, b : A$, dos elements qualssevol de A, anomenarem

$$a = b$$

al tipus de les igualtats entre a i b. Cada element d'aquest tipus equivaldrà a una demostració d'aquesta igualtat.

El tipus de les igualtats

Donats $a, b : A$, dos elements qualssevol de A, anomenarem

$$a = b$$

al tipus de les igualtats entre a i b. Cada element d'aquest tipus equivaldrà a una demostració d'aquesta igualtat.

Per exemple, sigui $n : \mathbb{N}$ un nombre natural. Per veure que n i $n + 0$ són iguals, necessitem donar una demostració p d'aquest fet, de manera que

$$p : n = n + 0$$

Teoria homotòpica de tipus

La *teoria homotòpica de tipus* és una teoria de tipus intuïcionista que incorpora les innovacions següents:

Teoria homotòpica de tipus

La *teoria homotòpica de tipus* és una teoria de tipus intuïcionista que incorpora les innovacions següents:

- Associació d'un ∞-grupoide a cada tipus.

Teoria homotòpica de tipus

La *teoria homotòpica de tipus* és una teoria de tipus intuïcionista que incorpora les innovacions següents:

- Associació d'un ∞-grupoide a cada tipus.
- L'axioma d'univalència de Voevodsky.

Teoria homotòpica de tipus

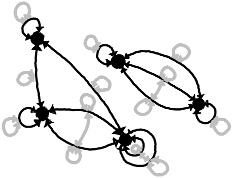
La *teoria homotòpica de tipus* és una teoria de tipus intuïcionista que incorpora les innovacions següents:

- Associació d'un ∞-grupoide a cada tipus.
- L'axioma d'univalència de Voevodsky.
- Els tipus inductius d'ordre superior.

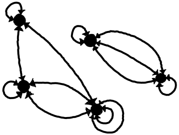
Els tipus com a ∞-grupoides

$\vdots$ $\quad$ $\vdots$ $\quad$ $\vdots$

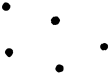
2-Igualtats $\quad$ $\displaystyle\sum_{x,y:A}\ \sum_{p,q:x=y}(p=q)$



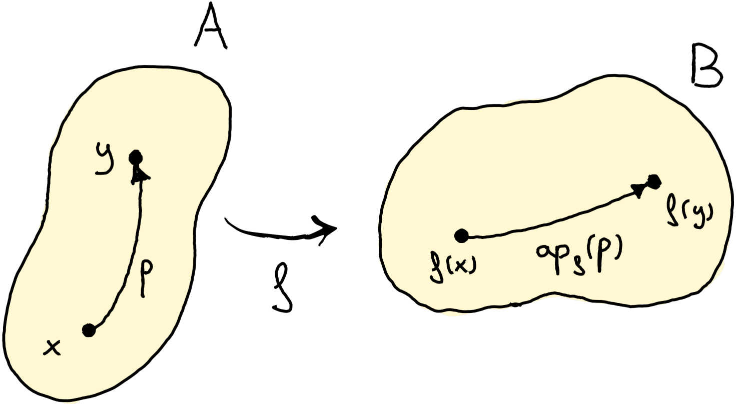
Igualtats $\quad$ $\displaystyle\sum_{x,y:A}(x=y)$



Tipus $\quad$ A



Les funcions com a functors



Els n-tipus

Definició

Direm que un tipus A és un *n-tipus* si compleix la proposició recursiva

$$\mathtt{is}\text{-}n\text{-}\mathtt{type}(A) :\equiv \begin{cases} \mathtt{isContr}(A) & \text{si } n \equiv \text{-}2 \\ \prod_{x,y:A} \mathtt{is}\text{-}m\text{-}\mathtt{type}(x =_A y) & \text{si } n \equiv m+1 \end{cases}$$

Els n-tipus

Definició

Direm que un tipus A és un *n-tipus* si compleix la proposició recursiva

$$\texttt{is-}n\texttt{-type}(A) :\equiv \begin{cases} \texttt{isContr}(A) & \text{si } n \equiv \text{-}2 \\ \prod_{x,y:A} \texttt{is-}m\texttt{-type}(x =_A y) & \text{si } n \equiv m + 1 \end{cases}$$

Anomenarem

- Tipus contràctils als $(\text{-}2)$-tipus
- Proposicions simples als $(\text{-}1)$-tipus
- Conjunts als 0-tipus

Homotopies i equivalències

Definició

Siguin $E : A \to \mathrm{U}$ una família i $f, g : \prod_{x:A} E(x)$ dues funcions dependents. Una *homotopia* de f a g és una funció dependent del tipus

$$f \sim g :\equiv \prod_{x:A}(f(x) = g(x))$$

Homotopies i equivalències

Definició

Siguin $E : A \to \mathrm{U}$ una família i $f, g : \prod_{x:A} E(x)$ dues funcions dependents. Una *homotopia* de f a g és una funció dependent del tipus

$$f \sim g :\equiv \prod_{x:A} (f(x) = g(x))$$

Definició

Siguin A i B dos tipus arbitraris. Definim el *tipus de les equivalències* entre A i B com

$$(A \simeq B) : \sum_{f:A\to B} \left(\sum_{g:B\to A} (f \circ g \sim \mathtt{id}_B) \right) \times \left(\sum_{h:B\to A} (h \circ f \sim \mathtt{id}_A) \right)$$

Axioma d'univalència

Lema

Siguin A i B dos tipus arbitraris. Existeix una funció

$$\mathtt{idtoeqv} : (A =_{\mathrm{U}} B) \to (A \simeq B)$$

Axioma d'univalència

Lema

Siguin A i B dos tipus arbitraris. Existeix una funció

$$\texttt{idtoeqv} : (A =_{\mathrm{U}} B) \to (A \simeq B)$$

Axioma d'univalència

Siguin A i B dos tipus arbitraris. La funció `idtoeqv` és una equivalència, és a dir,

$$(A = B) \simeq (A \simeq B)$$

Continguts

1 Teoria homotòpica de tipus

2 Tipus inductius d'ordre superior

3 Espais recobridors

4 Recerca futura

Tipus inductius

Definició

Direm que un tipus és *inductiu* si està generat lliurement per una llista de constructors.

Tipus inductius

Definició

Direm que un tipus és *inductiu* si està generat lliurement per una llista de constructors.

Si A és un tipus inductiu, els seus constructors podran ser elements de A o funcions estrictament positives i amb codomini A.

Tipus inductius

Definició

Direm que un tipus és *inductiu* si està generat lliurement per una llista de constructors.

Si A és un tipus inductiu, els seus constructors podran ser elements de A o funcions estrictament positives i amb codomini A.

Per exemple, definim el tipus dels *nombres naturals* amb els constructors

$$0 : \mathbb{N}$$
$$\mathsf{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

Tipus inductius d'ordre superior

Definició

Direm que un tipus A és *inductiu d'ordre superior* si està generat lliurement per una llista ordenada de constructors de A o constructors de qualsevol n-igualtat sobre A.

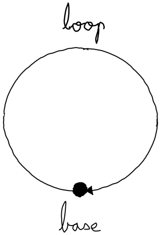
Tipus inductius d'ordre superior

Definició

Direm que un tipus A és *inductiu d'ordre superior* si està generat lliurement per una llista ordenada de constructors de A o constructors de qualsevol n-igualtat sobre A.

Per exemple, definim la *circumferència* $\mathbb{S}^1$ pels constructors

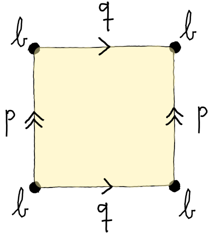
$$\begin{aligned} base &: \mathbb{S}^1, \\ loop &: base =_{\mathbb{S}^1} base. \end{aligned}$$

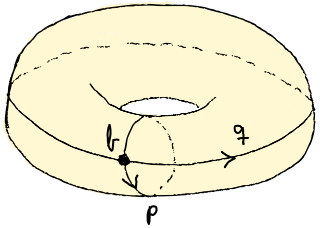


El tor

Un *tor* $\mathbb{T}^2$ és un tipus inductiu d'ordre superior generat pels constructors

$$
\begin{aligned}
b &: \mathbb{T}^2, \\
p &: b = b, \\
q &: b = b, \\
t &: p \cdot q = q \cdot p.
\end{aligned}
$$

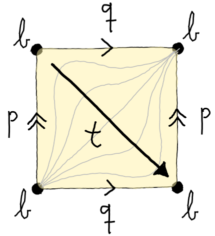


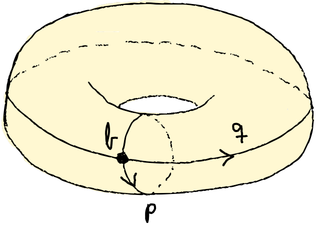


El tor

Un *tor* $\mathbb{T}^2$ és un tipus inductiu d'ordre superior generat pels constructors

$$\begin{aligned} b &: \mathbb{T}^2, \\ p &: b = b, \\ q &: b = b, \\ t &: p \cdot q = q \cdot p. \end{aligned}$$





El tor i el producte de dues circumferències

Teorema (Sojakova, 2015)

Els tipus de $\mathbb{T}^2$ *i* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ *són equivalents. És a dir,*

$$\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

El tor i el producte de dues circumferències

Teorema (Sojakova, 2015)

Els tipus de $\mathbb{T}^2$ *i* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ *són equivalents. És a dir,*

$$\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

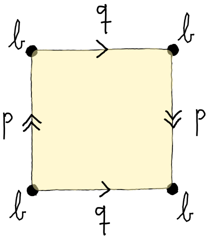
Corol·lari

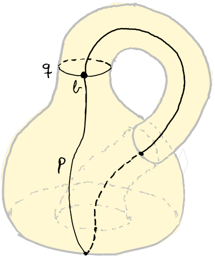
El tipus $\mathbb{T}^2$ *és un* 1*-tipus.*

L'ampolla de Klein

L'ampolla de Klein $\mathbb{K}$ és un tipus inductiu d'ordre superior generat pels constructors

$$\begin{aligned} b &: \mathbb{K}, \\ p &: b = b, \\ q &: b = b, \\ t &: p \cdot q = q \cdot p^{-1}. \end{aligned}$$

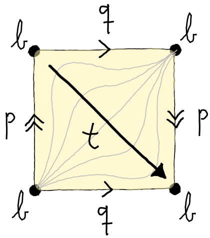


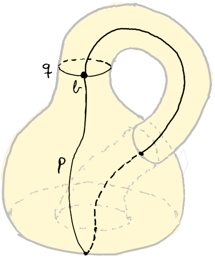


L'ampolla de Klein

L'ampolla de Klein $\mathbb{K}$ és un tipus inductiu d'ordre superior generat pels constructors

$$\begin{aligned} b &: \mathbb{K}, \\ p &: b = b, \\ q &: b = b, \\ t &: p \cdot q = q \cdot p^{-1}. \end{aligned}$$





Continguts

1. Teoria homotòpica de tipus
2. Tipus inductius d'ordre superior
3. Espais recobridors
4. Recerca futura

Recobridors

Definició (Teoria d'homotopia)

Un *recobridor* d'un espai A és un fibrat $f : C \to A$ amb fibra discreta.

Recobridors

Definició (Teoria d'homotopia)

Un *recobridor* d'un espai A és un fibrat $f : C \to A$ amb fibra discreta.

Definició (Teoria homotòpica de tipus)

Un *espai recobridor* d'un tipus A és una família de conjunts indexada per A, és a dir, una família $P : A \to \mathrm{Set}$.

Recobridors

Definició (Teoria d'homotopia)

Un *recobridor* d'un espai A és un fibrat $f : C \to A$ amb fibra discreta.

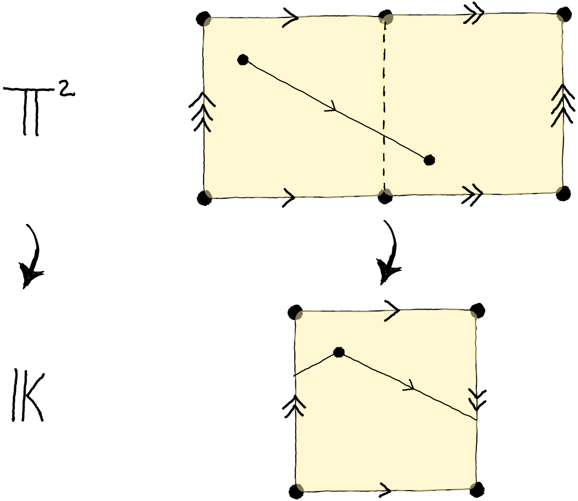
Definició (Teoria homotòpica de tipus)

Un *espai recobridor* d'un tipus A és una família de conjunts indexada per A, és a dir, una família $P : A \to \mathrm{Set}$.

A partir de la definició de la teoria homotòpica de tipus, podem recuperar el recobridor com la projecció següent:

$$\mathtt{pr}_1 : \left(\sum_{x:A} P(x)\right) \to A$$

El tor recobreix l'ampolla de Klein



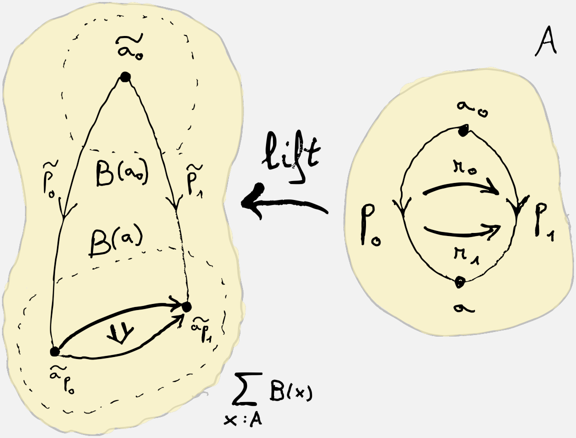
Elevacions en recobridors

Teorema

Sigui A un tipus 0-connex i $B : A \to \mathrm{Set}$ un espai recobridor puntejat de A. Per a tot $n : \mathbb{N}'$ tal que $n \geq 1$, si $\sum_{x:A} B(x)$ és un n-tipus, llavors A també ho és.

Elevacions en recobridors

Demostració.



$\square$

El recobridor de l'ampolla de Klein

Considerem l'equivalència $E : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ definida per la funció $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tal que $f(0_{\mathbf{2}}) :\equiv 1_{\mathbf{2}}$ i $f(1_{\mathbf{2}}) :\equiv 0_{\mathbf{2}}$, que és la seva pròpia inversa. Aplicarem l'axioma d'univalència per obtenir

$$\mathit{flip} :\equiv \texttt{univalence}(E) : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

El recobridor de l'ampolla de Klein

Considerem l'equivalència $E : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ definida per la funció $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tal que $f(0_\mathbf{2}) :\equiv 1_\mathbf{2}$ i $f(1_\mathbf{2}) :\equiv 0_\mathbf{2}$, que és la seva pròpia inversa. Aplicarem l'axioma d'univalència per obtenir

$$\mathit{flip} :\equiv \mathtt{univalence}(E) : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

Llavors, escollim els elements següents, que utilitzarem per a definir el recobridor de $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &: \mathrm{U} \\
\mathit{flip} &: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
\mathsf{refl}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} &: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
\mathsf{refl}_{\mathit{flip}} &: (\mathit{flip} \cdot \mathsf{refl}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = \mathsf{refl}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \cdot \mathit{flip}^{-1}) \equiv (\mathit{flip} = \mathit{flip})
\end{aligned}$$

El recobridor de l'ampolla de Klein

Pel principi de recursió de l'ampolla de Klein, definim $\mathcal{K} : \mathbb{K} \to \mathrm{Set}$ amb les equacions

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(b) &\equiv \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \alpha : \mathtt{ap}_{\mathcal{K}}(p) &= \mathit{flip} \\ \beta : \mathtt{ap}_{\mathcal{K}}(q) &= \mathsf{refl}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \\ \Phi : \mathtt{ap}^2_{\mathcal{K}}(t) &= \mathcal{L} \cdot \mathsf{refl}_{\mathit{flip}} \cdot (\mathcal{R})^{-1} \end{aligned}$$

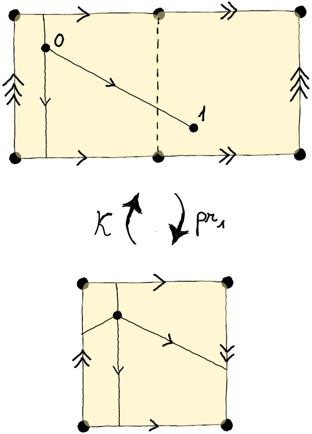
on

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:\equiv \mathtt{apComp}(p, q) \cdot (\alpha * \beta) \\ \mathcal{R} &:\equiv \mathtt{apComp}(q, p^{-1}) \cdot (\beta * (\mathtt{apInv}(p) \cdot \mathtt{ap}_{\cdot^{-1}}(\alpha))) \end{aligned}$$

El recobridor de l’ampolla de Klein

$$\mathbb{T}^2 \overset{?}{\simeq} \sum_{x\,:\,\mathbb{K}} K(x)$$

$$\begin{tikzcd} \sum_{x:\mathbb{K}} K(x) \arrow[d, shift left=1.5ex, "\mathrm{pr}_1"] \\ \mathbb{K} \arrow[u, shift left=1.5ex, "K"] \end{tikzcd}$$



Continguts

1 Teoria homotòpica de tipus

2 Tipus inductius d'ordre superior

3 Espais recobridors

4 Recerca futura

Recerca futura

1. Demostrar en detall l'equivalència entre el tor i $\sum_{x:\mathbb{K}} \mathcal{K}(x)$.

Recerca futura

1. Demostrar en detall l'equivalència entre el tor i $\sum_{x:\mathbb{K}} \mathcal{K}(x)$.
2. Formalitzar la definició de *tipus no orientable* generalitzant el que passa en l'exemple que hem vist.

Recerca futura

1. Demostrar en detall l'equivalència entre el tor i $\sum_{x:\mathbb{K}} \mathcal{K}(x)$.
2. Formalitzar la definició de *tipus no orientable* generalitzant el que passa en l'exemple que hem vist.
3. Validar les construccions realitzades amb l'exemple dels espais projectius, basant-me en un article de Buchholtz i Rijke (2017).

Recerca futura

1. Demostrar en detall l'equivalència entre el tor i $\sum_{x:\mathbb{K}} \mathcal{K}(x)$.
2. Formalitzar la definició de *tipus no orientable* generalitzant el que passa en l'exemple que hem vist.
3. Validar les construccions realitzades amb l'exemple dels espais projectius, basant-me en un article de Buchholtz i Rijke (2017).
4. Implementar-ho en un assistent de demostració com Coq o Agda.