Modelos topológicos de infinito-grupoides

David Martínez Carpena

Supervisor: Carles Casacuberta

IX Encuentro de Jóvenes Topólogos

20 de octubre de 2021

Universitat de Barcelona

Contents

Motivación

- Interpretar la teoría homotópica de tipos en un modelo de ∞-grupoides.

Motivación

- Interpretar la teoría homotópica de tipos en un modelo de ∞-grupoides.
- Estudiar el modelo de ∞-categorías basado en categorías enriquecidas topológicamente.

Motivación

- Interpretar la teoría homotópica de tipos en un modelo de ∞-grupoides.
- Estudiar el modelo de ∞-categorías basado en categorías enriquecidas topológicamente.
- Demostrar que la categoría de caminos de Moore es un modelo para el ∞-grupoide fundamental de un espacio.

Motivación

- Interpretar la teoría homotópica de tipos en un modelo de ∞-grupoides.
- Estudiar el modelo de ∞-categorías basado en categorías enriquecidas topológicamente.
- Demostrar que la categoría de caminos de Moore es un modelo para el ∞-grupoide fundamental de un espacio.
- Demostrar que el nervio coherente de un ∞-grupoide es equivalente al nervio de Segal de la categoría topológica asociada.

Contents

Categorias de orden superior

- Una ∞-categoría no solo contiene objetos y morfismos entre objetos, sino que tiene n-morfismos entre $(n-1)$-morfismos para todo $n \geq 1$.

Categorias de orden superior

- Una ∞-categoría no solo contiene objetos y morfismos entre objetos, sino que tiene n-morfismos entre $(n-1)$-morfismos para todo $n \geq 1$.

- No existe una única definición de ∞-categoría, sino distintos *modelos*. **Ejemplo:** Quasi-categorías (Joyal, Lurie).

Categorias de orden superior

- Una ∞-categoría no solo contiene objetos y morfismos entre objetos, sino que tiene n-morfismos entre $(n-1)$-morfismos para todo $n \geq 1$.
- No existe una única definición de ∞-categoría, sino distintos *modelos*. **Ejemplo:** Quasi-categorías (Joyal, Lurie).
- Un ∞-*grupoide* es una ∞-categoría con los n-morfismos invertibles salvo $(n+1)$-morfismos, para todo $n \geq 1$.

Categorias de orden superior

- Una ∞-categoría no solo contiene objetos y morfismos entre objetos, sino que tiene n-morfismos entre $(n-1)$-morfismos para todo $n \geq 1$.
- No existe una única definición de ∞-categoría, sino distintos *modelos*. **Ejemplo:** Quasi-categorías (Joyal, Lurie).
- Un ∞-*grupoide* es una ∞-categoría con los n-morfismos invertibles salvo $(n+1)$-morfismos, para todo $n \geq 1$.
- La *hipótesis de homotopía* de Grothendieck nos dice que para cada espacio topológico X existe un ∞-*grupoide fundamental* $\Pi_\infty(X)$ que codifica la estructura homotópica de X.

Categorías topológicas

- Una *categoría topológica* es una categoría enriquecida en la categoría de espacios topológicos compactamente generados.

Categorías topológicas

- Una *categoría topológica* es una categoría enriquecida en la categoría de espacios topológicos compactamente generados.
- Para cada categoría topológica $\mathcal{C}$, la *categoría de homotopía* $\mathrm{h}\mathcal{C}$ tiene los mismos objetos que $\mathcal{C}$ y $\mathrm{h}\mathcal{C}(X, Y) = \pi_0(\mathcal{C}(X, Y))$.

Categorías topológicas

- Una *categoría topológica* es una categoría enriquecida en la categoría de espacios topológicos compactamente generados.
- Para cada categoría topológica $\mathcal{C}$, la *categoría de homotopía* $\mathrm{h}\mathcal{C}$ tiene los mismos objetos que $\mathcal{C}$ y $\mathrm{h}\mathcal{C}(X, Y) = \pi_0(\mathcal{C}(X, Y))$.
- Una categoría topológica $\mathcal{C}$ es un ∞-*grupoide* si $\mathrm{h}\mathcal{C}$ es un grupoide.

Hipótesis de homotopía

Top **Top-Cat**

Hipótesis de homotopía

$$\mathbf{Top} \underset{\mathrm{Sing}}{\overset{|\cdot|}{\rightleftarrows}} \mathbf{sSet}_Q \qquad\qquad \mathbf{Top\text{-}Cat}$$

- La *realización geométrica* $|\cdot|$ y el *conjunto simplicial singular* Sing forman una equivalencia de Quillen.

Hipótesis de homotopía

$$\mathbf{Top} \underset{\mathrm{Sing}}{\overset{|\cdot|}{\leftrightarrows}} \mathbf{sSet}_Q \qquad\qquad \mathbf{sSet\text{-}Cat} \underset{\mathrm{Sing}_e}{\overset{|\cdot|_e}{\rightleftarrows}} \mathbf{Top\text{-}Cat}$$

- La *realización geométrica* $|\cdot|$ y el *conjunto simplicial singular* Sing forman una equivalencia de Quillen.
- La *realización geométrica enriquecida* $|\cdot|_e$ y el *conjunto simplicial singular enriquecido* Sing_e forman una equivalencia de Quillen.

Hipótesis de homotopía

$$\mathbf{Top} \underset{\mathrm{Sing}}{\overset{|\cdot|}{\leftrightarrows}} \mathbf{sSet}_Q \qquad \mathbf{sSet}_J \underset{\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}}{\overset{\mathfrak{C}}{\rightleftarrows}} \mathbf{sSet\text{-}Cat} \underset{\mathrm{Sing}_e}{\overset{|\cdot|_e}{\rightleftarrows}} \mathbf{Top\text{-}Cat}$$

- La *realización geométrica* $|\cdot|$ y el *conjunto simplicial singular* Sing forman una equivalencia de Quillen.
- La *realización geométrica enriquecida* $|\cdot|_e$ y el *conjunto simplicial singular enriquecido* Sing_e forman una equivalencia de Quillen.
- La *realización simplicial* $\mathfrak{C}$ y el *nervio homotópicamente coherente* $\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}$ forman una equivalencia de Quillen.

Hipótesis de homotopía

$$\mathbf{Top} \underset{\mathrm{Sing}}{\overset{|\cdot|}{\leftrightarrows}} \mathbf{sSet}_Q \underset{k^!}{\overset{k_!}{\rightleftarrows}} \mathbf{sSet}_J \underset{\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}}{\overset{\mathfrak{C}}{\rightleftarrows}} \mathbf{sSet\text{-}Cat} \underset{\mathrm{Sing}_e}{\overset{|\cdot|_e}{\rightleftarrows}} \mathbf{Top\text{-}Cat}$$

- La *realización geométrica* $|\cdot|$ y el *conjunto simplicial singular* Sing forman una equivalencia de Quillen.
- La *realización geométrica enriquecida* $|\cdot|_e$ y el *conjunto simplicial singular enriquecido* Sing_e forman una equivalencia de Quillen.
- La *realización simplicial* $\mathfrak{C}$ y el *nervio homotópicamente coherente* $\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}$ forman una equivalencia de Quillen.
- $k_!$ y $k^!$ forman una localización entre las estructuras de Joyal y Quillen.

Hipótesis de homotopía

$$\mathbf{Top} \underset{\mathrm{Sing}}{\overset{|\cdot|}{\rightleftarrows}} \mathbf{sSet}_Q \underset{k^!}{\overset{k_!}{\rightleftarrows}} \mathbf{sSet}_J \underset{\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}}{\overset{\mathfrak{C}}{\rightleftarrows}} \mathbf{sSet\text{-}Cat} \underset{\mathrm{Sing}_e}{\overset{|\cdot|_e}{\rightleftarrows}} \mathbf{Top\text{-}Cat}$$

- La *realización geométrica* $|\cdot|$ y el *conjunto simplicial singular* Sing forman una equivalencia de Quillen.
- La *realización geométrica enriquecida* $|\cdot|_e$ y el *conjunto simplicial singular enriquecido* Sing_e forman una equivalencia de Quillen.
- La *realización simplicial* $\mathfrak{C}$ y el *nervio homotópicamente coherente* $\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}$ forman una equivalencia de Quillen.
- $k_!$ y $k^!$ forman una localización entre las estructuras de Joyal y Quillen.

$$\mathbf{Top} \underset{\mathrm{Sing}}{\overset{|\cdot|}{\rightleftarrows}} \mathbf{sSet}_Q \underset{k^! \circ \mathrm{N}^{\mathfrak{R}} \circ \mathrm{Sing}_e}{\overset{|\cdot|_e \circ \mathfrak{C} \circ k_!}{\rightleftarrows}} \infty\text{-}\mathbf{Grpd}.$$

Nervio y realización formal

Dada una categoría $\mathcal{C}$ cocompleta y localmente pequeña, y un objeto cosimplicial $Q : \Delta \to \mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$.

Nervio y realización formal

Dada una categoría $\mathcal{C}$ cocompleta y localmente pequeña, y un objeto cosimplicial $Q : \Delta \to \mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$.

El *Q-nervio* $\mathsf{N}^Q : \mathcal{C} \to \mathbf{sSet}$ se define como

$$\mathsf{N}^Q_n(A) = \mathcal{C}(Q[n], A) \qquad \forall\, [n] \in \Delta.$$

Nervio y realización formal

Dada una categoría $\mathcal{C}$ cocompleta y localmente pequeña, y un objeto cosimplicial $Q : \Delta \to \mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$.

El *Q-nervio* $\mathrm{N}^Q : \mathcal{C} \to \mathbf{sSet}$ se define como

$$\mathrm{N}_n^Q(A) = \mathcal{C}(Q[n], A) \qquad \forall\ [n] \in \Delta.$$

La *Q-realización* $|\cdot|_Q : \mathbf{sSet} \to \mathcal{C}$ se define como

$$|X|_Q = \left(\coprod X_n \otimes Q[n]\right) / \sim$$

Nervio y realización formal

Dada una categoría $\mathcal{C}$ cocompleta y localmente pequeña, y un objeto cosimplicial $Q : \Delta \to \mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$.

El *Q-nervio* $\mathsf{N}^Q : \mathcal{C} \to \mathbf{sSet}$ se define como

$$\mathsf{N}^Q_n(A) = \mathcal{C}(Q[n], A) \qquad \forall\ [n] \in \Delta.$$

La *Q-realización* $|\cdot|_Q : \mathbf{sSet} \to \mathcal{C}$ se define como

$$|X|_Q = \int^{[n]\in\Delta} X_n \otimes Q[n].$$

Nervio y realización formal

Dada una categoría $\mathcal{C}$ cocompleta y localmente pequeña, y un objeto cosimplicial $Q : \Delta \to \mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$.

El *Q-nervio* $\mathrm{N}^Q : \mathcal{C} \to \mathbf{sSet}$ se define como

$$\mathrm{N}^Q_n(A) = \mathcal{C}(Q[n], A) \qquad \forall\ [n] \in \Delta.$$

La *Q-realización* $|\cdot|_Q : \mathbf{sSet} \to \mathcal{C}$ se define como

$$|X|_Q = \int^{[n]\in\Delta} X_n \otimes Q[n].$$

El Q-nervio y la Q-realización siempre forman una adjunción

$$|\cdot|_Q : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathcal{C} : \mathrm{N}^Q .$$

Nervio homotópicamente coherente

Existe un objeto cosimplicial definido para cada $[n] \in \Delta$ como la categoría simplicial $\Delta^{\Re}[n]$ tal que:

- $\mathrm{Obj}(\Delta^{\Re}[n]) = [n] = \{0, \ldots, n\}$
- Para cada $i, j \in \mathrm{Obj}(\Delta^{\Re}[n])$, $\mathrm{Hom}(i, j) = (\Delta[1])^{(j-i-1)}$

Nervio homotópicamente coherente

Existe un objeto cosimplicial definido para cada $[n] \in \Delta$ como la categoría simplicial $\Delta^{\mathfrak{R}}[n]$ tal que:

- $\mathrm{Obj}(\Delta^{\mathfrak{R}}[n]) = [n] = \{0, \ldots, n\}$
- Para cada $i, j \in \mathrm{Obj}(\Delta^{\mathfrak{R}}[n])$, $\mathrm{Hom}(i, j) = (\Delta[1])^{(j-i-1)}$

El *nervio homotópicamente coherente* $\mathrm{N}^{\mathfrak{R}} : \mathbf{sSet\text{-}Cat} \to \mathbf{sSet}$ se define como

$$\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}_n(\mathcal{C}) = \mathbf{sSet\text{-}Cat}(\Delta^{\mathfrak{R}}[n], \mathcal{C}).$$

Nervio homotópicamente coherente

Existe un objeto cosimplicial definido para cada $[n] \in \Delta$ como la categoría simplicial $\Delta^{\mathfrak{R}}[n]$ tal que:

- $\mathrm{Obj}(\Delta^{\mathfrak{R}}[n]) = [n] = \{0, \ldots, n\}$
- Para cada $i, j \in \mathrm{Obj}(\Delta^{\mathfrak{R}}[n])$, $\mathrm{Hom}(i, j) = (\Delta[1])^{(j-i-1)}$

El *nervio homotópicamente coherente* $\mathrm{N}^{\mathfrak{R}} : \mathbf{sSet\text{-}Cat} \to \mathbf{sSet}$ se define como

$$\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}_n(\mathcal{C}) = \mathbf{sSet\text{-}Cat}(\Delta^{\mathfrak{R}}[n], \mathcal{C}).$$

La *realización simplicial* $\mathfrak{C} : \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet\text{-}Cat}$ se define como

$$\mathfrak{C}(X) = \int^{[n] \in \Delta} X_n \otimes \Delta^{\mathfrak{R}}[n].$$

Categorías de caminos de Moore

Para cada espacio X, definimos la *categoría de caminos de Moore* $\Pi_\infty^M(X)$ como el ∞-grupoide tal que:

- Los objetos son puntos de X.

Categorías de caminos de Moore

Para cada espacio X, definimos la *categoría de caminos de Moore* $\Pi_\infty^M(X)$ como el ∞-grupoide tal que:

- Los objetos son puntos de X.
- Cada homset $\Pi_\infty^M(X)(x,y)$ es igual a

$$P_{x,y}^M X = \{(f,r) \in X^{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}_+ \mid f(0) = x \text{ and } f(s) = y \ \forall s \geq r\}.$$

Categorías de caminos de Moore

Para cada espacio X, definimos la *categoría de caminos de Moore* $\Pi_\infty^M(X)$ como el ∞-grupoide tal que:

- Los objetos son puntos de X.
- Cada homset $\Pi_\infty^M(X)(x, y)$ es igual a

$$P_{x,y}^M X = \{(f, r) \in X^{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}_+ \mid f(0) = x \text{ and } f(s) = y \ \forall s \geq r\}.$$

- La composición está definida por

$$\begin{array}{rccc} \circ : & P_{x,y}^M X \times P_{y,z}^M X & \longrightarrow & P_{x,z}^M X \\ & ((f, r), (g, s)) & \longmapsto & (f * g, r + s) \end{array}$$

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(t) & \text{if } 0 \leq t < r \\ g(t - r) & \text{if } t \geq r \end{cases}$$

El ∞-grupoide fundamental

Denotamos por $\Omega_x^M(X)$ el monoide topológico group-like $P_{x,x}^M X$. El functor de *delooping* $\mathbb{D} : \mathbf{tMon} \to \mathbf{Top\text{-}Cat}_0$ envía $M \in \mathbf{tMon}$ a la categoría topológica con objeto $*$ y $\mathrm{Hom}(*, *) = M$.

El ∞-grupoide fundamental

Denotamos por $\Omega_x^M(X)$ el monoide topológico group-like $P^M_{x,x}X$. El functor de *delooping* $\mathbb{D} : \mathbf{tMon} \to \mathbf{Top\text{-}Cat}_0$ envía $M \in \mathbf{tMon}$ a la categoría topológica con objeto $*$ y $\mathrm{Hom}(*, *) = M$.

Theorem

Consideramos (X, x) un espacio arco conexo con buen punto base. El espacio topológico $|\,\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}(\mathrm{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega_x^M(X)))|$ es un espacio clasificador para $\Omega_x^M(X)$ y, como consecuencia,

$$|\,\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}(\mathrm{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega^M X))| \simeq X.$$

El ∞-grupoide fundamental

Denotamos por $\Omega_x^M(X)$ el monoide topológico group-like $P^M_{x,x}X$. El functor de *delooping* $\mathbb{D} : \mathbf{tMon} \to \mathbf{Top\text{-}Cat}_0$ envía $M \in \mathbf{tMon}$ a la categoría topológica con objeto $*$ y $\mathrm{Hom}(*, *) = M$.

Theorem

Consideramos (X, x) un espacio arco conexo con buen punto base. El espacio topológico $|\,\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}(\mathrm{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega_x^M(X)))|$ es un espacio clasificador para $\Omega_x^M(X)$ y, como consecuencia,

$$|\,\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}(\mathrm{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega^M X))| \simeq X.$$

Entonces, el ∞-grupoide $\Pi_\infty^M(X)$ es débilmente homotópicamente equivalente al ∞-grupoide $(|\cdot|_e \circ \mathfrak{C} \circ k_! \circ \mathrm{Sing})(X)$.

Contents

Espacio clasificador de Milgram

Un *espacio clasificador* $\mathrm{B}(G)$ de un grupo topológico G es el cociente de un espacio débilmente contráctil $\mathrm{E}(G)$ por una acción libre y propia de G.

Espacio clasificador de Milgram

Un *espacio clasificador* $\mathrm{B}(G)$ de un grupo topológico G es el cociente de un espacio débilmente contráctil $\mathrm{E}(G)$ por una acción libre y propia de G.

El *nervio topológico* $\mathrm{N}^t : \textbf{Top-Cat}_0 \to \textbf{sTop}_0$ envía $\mathbb{D}\,M \in \textbf{Top-Cat}_0$ con $\mathrm{Hom}(*, *) = M$ al conjunto simplicial con $\mathrm{N}^t_0(\mathbb{D}\,M) = *$ y $\mathrm{N}^t_n(\mathbb{D}\,M) = M^n$.

Espacio clasificador de Milgram

Un *espacio clasificador* $\mathrm{B}(G)$ de un grupo topológico G es el cociente de un espacio débilmente contráctil $\mathrm{E}(G)$ por una acción libre y propia de G.

El *nervio topológico* $\mathrm{N}^t : \mathbf{Top\text{-}Cat}_0 \to \mathbf{sTop}_0$ envía $\mathbb{D}\, M \in \mathbf{Top\text{-}Cat}_0$ con $\mathrm{Hom}(*, *) = M$ al conjunto simplicial con $\mathrm{N}^t_0(\mathbb{D}\, M) = *$ y $\mathrm{N}^t_n(\mathbb{D}\, M) = M^n$.

La *realización geométrica topológica* $|\cdot|_t : \mathbf{sTop} \to \mathbf{Top}$ envía el espacio simplicial X a

$$|X|_t = \int^{[n]\in\Delta} X_n \times \Delta^n.$$

Espacio clasificador de Milgram

Un *espacio clasificador* $\mathrm{B}(G)$ de un grupo topológico G es el cociente de un espacio débilmente contráctil $\mathrm{E}(G)$ por una acción libre y propia de G.

El *nervio topológico* $\mathrm{N}^t : \mathbf{Top\text{-}Cat}_0 \to \mathbf{sTop}_0$ envía $\mathbb{D}\, M \in \mathbf{Top\text{-}Cat}_0$ con $\mathrm{Hom}(*, *) = M$ al conjunto simplicial con $\mathrm{N}^t_0(\mathbb{D}\, M) = *$ y $\mathrm{N}^t_n(\mathbb{D}\, M) = M^n$.

La *realización geométrica topológica* $|\cdot|_t : \mathbf{sTop} \to \mathbf{Top}$ envía el espacio simplicial X a

$$|X|_t = \int^{[n]\in\Delta} X_n \times \Delta^n.$$

Milgram definió un espacio clasificador functorial $\mathrm{B}(M)$ para cada monoide topológico group-like M, que es equivalente a

$$\mathrm{B}(M) = |\,\mathrm{N}^t(\mathbb{D}\, M)|_t.$$

Observaciones

Theorem

Consideramos (X, x) *un espacio arco conexo con buen punto base. El espacio topológico* $|\,\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega_x^M(X)))|$ *es un espacio clasificador para* $\Omega_x^M(X)$ *y, como consecuencia,*

$$|\,\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega^M X))| \simeq X.$$

Observaciones

Theorem

Consideramos (X,x) un espacio arco conexo con buen punto base. El espacio topológico $|\,\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega_x^M(X)))|$ es un espacio clasificador para $\Omega_x^M(X)$ y, como consecuencia,

$$|\,\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega^M X))| \simeq X.$$

Consideramos (X,x) un espacio arco conexo con punto base. Entonces, existe una equivalencia débil

$$\mathsf{B}(\Omega_x^M X) \simeq X.$$

Observaciones

Theorem

Consideramos (X, x) *un espacio arco conexo con buen punto base. El espacio topológico* $|\,\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega_x^M(X)))|$ *es un espacio clasificador para* $\Omega_x^M(X)$ *y, como consecuencia,*

$$|\,\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega^M X))| \simeq X.$$

Consideramos (X, x) un espacio arco conexo con punto base. Entonces, existe una equivalencia débil

$$\mathsf{B}(\Omega_x^M X) \simeq X.$$

Es suficiente: Para cada espacio topológico X,

$$|\,\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega_x^M X))| \simeq \mathsf{B}(\Omega_x^M X) = |\,\mathsf{N}^t(\mathbb{D}\,\Omega_x^M X)|_t.$$

Observaciones

Theorem

Consideramos (X, x) un espacio arco conexo con buen punto base. El espacio topológico $|\,\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}(\mathrm{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega_x^M(X)))|$ es un espacio clasificador para $\Omega_x^M(X)$ y, como consecuencia,

$$|\,\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}(\mathrm{Sing}_e(\mathbb{D}\,\Omega^M X))| \simeq X.$$

Consideramos (X, x) un espacio arco conexo con punto base. Entonces, existe una equivalencia débil

$$\mathrm{B}(\Omega_x^M X) \simeq X.$$

Es suficiente: Para cada monoide topológico group-like M,

$$|\,\mathrm{N}^{\mathfrak{R}}(\mathrm{Sing}_e(\mathbb{D}\,M))| \simeq \mathrm{B}(M) = |\,\mathrm{N}^t(\mathbb{D}\,M)|_t.$$

Nervio simplicial diagonal

Existe un objeto cosimplicial definido para cada $[n] \in \Delta$ como la categoría simplicial $\Delta^d[n]$ tal que:

- $\mathrm{Obj}(\Delta^d[n]) = [n]$.
- Los morfismos de $\Delta^d[n]$ son generados libremente por los n-símplices $a_i \in \mathrm{Hom}(i-1, i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Nervio simplicial diagonal

Existe un objeto cosimplicial definido para cada $[n] \in \Delta$ como la categoría simplicial $\Delta^d[n]$ tal que:

- $\mathrm{Obj}(\Delta^d[n]) = [n]$.
- Los morfismos de $\Delta^d[n]$ son generados libremente por los n-símplices $a_i \in \mathrm{Hom}(i-1, i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

El *nervio simplicial diagonal* $\mathrm{N}^d : \mathbf{sSet\text{-}Cat} \to \mathbf{sSet}$ envía una categoría simplicial $\mathcal{C}$ a

$$\mathrm{N}^d_n(\mathcal{C}) = \mathbf{sSet\text{-}Cat}(\Delta^d[n], \mathcal{C}),$$

Nervio simplicial diagonal

Existe un objeto cosimplicial definido para cada $[n] \in \Delta$ como la categoría simplicial $\Delta^d[n]$ tal que:

- $\mathrm{Obj}(\Delta^d[n]) = [n]$.
- Los morfismos de $\Delta^d[n]$ son generados libremente por los n-símplices $a_i \in \mathrm{Hom}(i-1, i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

El *nervio simplicial diagonal* $\mathrm{N}^d : \mathbf{sSet\text{-}Cat} \to \mathbf{sSet}$ envía una categoría simplicial $\mathcal{C}$ a

$$\mathrm{N}^d_n(\mathcal{C}) = \mathbf{sSet\text{-}Cat}(\Delta^d[n], \mathcal{C}),$$

y puede ser factorizado como

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sSet} & \mathbf{bSet} \arrow[l, "\mathrm{d}"'] \\
\mathbf{sSet\text{-}Cat} \arrow[u, "\mathrm{N}^d"] \arrow[ur, "\mathrm{N}^\ell \circ \mathrm{I}"']
\end{tikzcd}$$

Idea de demostración I

Es suficiente con ver

$$|\,\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\,M))| \overset{?}{\simeq} |\,\mathsf{N}^t(\mathbb{D}\,M)|_t$$

Idea de demostración I

Es suficiente con ver

$$|\,\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\,M))| \overset{?}{\simeq} |\,\mathsf{N}^t(\mathbb{D}\,M)|_t$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Top} & \\
& \mathbf{sTop}_0 \arrow[ul, "|\cdot|_t"'] \\
& \mathbf{Top\text{-}Cat}_0 \arrow[u, "\mathsf{N}^t"'] & \mathbf{tMon} \arrow[l, "\mathbb{D}"]
\end{tikzcd}$$

Es suficiente con ver

$$|\,\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\,M))| \overset{?}{\simeq} |\,\mathsf{N}^t(\mathbb{D}\,M)|_t$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Top} & & \\
\mathbf{sSet}_0 \arrow[ur, "|\cdot|"] & & \mathbf{sTop}_0 \arrow[ul, "|\cdot|_t"'] & \\
\mathbf{sSet\text{-}Cat}_0 \arrow[u, "\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}"] & & \mathbf{Top\text{-}Cat}_0 \arrow[u, "\mathsf{N}^t"'] \arrow[ll, "\mathsf{Sing}_e"] & \mathbf{tMon} \arrow[l, "\mathbb{D}"]
\end{tikzcd}$$

Idea de demostración I

Es suficiente con ver

$$|\operatorname{N}^{\mathfrak{R}}(\operatorname{Sing}_e(\mathbb{D}\, M))| \overset{?}{\simeq} |\operatorname{N}^t(\mathbb{D}\, M)|_t$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Top} & & \\
\mathbf{sSet}_0 \arrow[ur, "|\cdot|"] & \mathbf{bSet}_0 \arrow[l, dashed, "\mathrm{d}"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{sTop}_0 \arrow[ul, "|\cdot|_t"'] \arrow[l, dashed, "\operatorname{Sing}_\ell"'] & \\
\mathbf{sSet\text{-}Cat}_0 \arrow[u, "\operatorname{N}^{\mathfrak{R}}"] & & \mathbf{Top\text{-}Cat}_0 \arrow[ll, "\operatorname{Sing}_e"'] \arrow[u, "\operatorname{N}^t"'] & \mathbf{tMon} \arrow[l, "\mathbb{D}"']
\end{tikzcd}$$

Idea de demostración I

Es suficiente con ver

$$|\,\mathsf{N}^{\Re}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\,M))| \overset{?}{\simeq} |\,\mathsf{N}^t(\mathbb{D}\,M)|_t$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Top} & & \\
\mathbf{sSet}_0 \arrow[ur, "|\cdot|"] & \mathbf{bSet}_0 \arrow[l, dashed, "\mathsf{d}"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{sTop}_0 \arrow[ul, "|\cdot|_t"'] \arrow[l, dashed, "\mathsf{Sing}_\ell"'] & \\
\mathbf{sSet\text{-}Cat}_0 \arrow[u, shift left=3, "\mathsf{N}^{\Re}"] \arrow[u, dashed, shift right=3, "\mathsf{N}^d"'] \arrow[u, phantom, "\overset{?}{\simeq}"] & & \mathbf{Top\text{-}Cat}_0 \arrow[ll, "\mathsf{Sing}_e"] \arrow[u, "\mathsf{N}^t"'] & \mathbf{tMon} \arrow[l, "\mathbb{D}"]
\end{tikzcd}$$

Idea de demostración I

Es suficiente con ver

$$|\,\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\,M))| \overset{?}{\simeq} |\,\mathsf{N}^t(\mathbb{D}\,M)|_t$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Top} & & \\
\mathbf{sSet}_0 \arrow[ur, "|\cdot|"] & \mathbf{bSet}_0 \arrow[l, dashed, "\mathsf{d}"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{sTop}_0 \arrow[ul, "|\cdot|_t"'] \arrow[l, dashed, "\mathsf{Sing}_\ell"] & \\
\mathbf{sSet\text{-}Cat}_0 \arrow[u, shift right=3, "\mathsf{N}^{\mathfrak{R}}"] \arrow[u, shift left=3, dashed, "\mathsf{N}^d"'] \arrow[u, phantom, "\overset{?}{\simeq}"] \arrow[ur, dashed, "\mathsf{N}^\ell \circ \mathsf{I}"'] \arrow[ur, phantom, bend left, "\circlearrowleft"] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathbf{Top\text{-}Cat}_0 \arrow[ll, "\mathsf{Sing}_e"] \arrow[u, "\mathsf{N}^t"'] & \mathbf{tMon} \arrow[l, "\mathbb{D}"]
\end{tikzcd}$$

Idea de demostración II

Para todo monoide topológico group-like M,

$$\mathsf{N}^d(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\, M)) \overset{?}{\simeq} \mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathsf{Sing}_e(\mathbb{D}\, M)).$$

Idea de demostración II

Para todo ∞-grupoide $\mathcal{C}$,

$$\mathsf{N}^d(\mathsf{Sing}_e(\mathcal{C})) \overset{?}{\simeq} \mathsf{N}^{\Re}(\mathsf{Sing}_e(\mathcal{C})).$$

Idea de demostración II

Para todo categoría simplicial fibrante $\mathcal{C}$ con $\mathsf{h}\mathcal{C}$ un grupoide,

$$\mathsf{N}^{d}(\mathcal{C}) \overset{?}{\simeq} \mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathcal{C}).$$

Idea de demostración II

Para todo categoría simplicial fibrante $\mathcal{C}$ con h$\mathcal{C}$ un grupoide,

$$\mathsf{N}^d(\mathcal{C}) \overset{?}{\simeq} \mathsf{N}^{\Re}(\mathcal{C}).$$

Podemos dividir-lo en dos subobjetivos:

- Demostrar que, para todo grupoide simplicial estricto $\mathcal{G}$,

$$\mathsf{N}^d(\mathcal{G}) \overset{?}{\simeq} \mathsf{N}^{\Re}(\mathcal{G}) \quad [\textit{Hinich}, 2015].$$

Idea de demostración II

Para todo categoría simplicial fibrante $\mathcal{C}$ con h$\mathcal{C}$ un grupoide,

$$\mathsf{N}^d(\mathcal{C}) \overset{?}{\simeq} \mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathcal{C}).$$

Podemos dividir-lo en dos subobjetivos:

- Demostrar que, para todo grupoide simplicial estricto $\mathcal{G}$,

$$\mathsf{N}^d(\mathcal{G}) \simeq \mathsf{N}^T(\mathcal{G}) \simeq \mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathcal{G}) \quad [\textit{Hinich}, 2015].$$

Idea de demostración II

Para todo categoría simplicial fibrante $\mathcal{C}$ con $\mathrm{h}\mathcal{C}$ un grupoide,

$$\mathsf{N}^d(\mathcal{C}) \overset{?}{\simeq} \mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathcal{C}).$$

Podemos dividir-lo en dos subobjetivos:

- Demostrar que, para todo grupoide simplicial estricto $\mathcal{G}$,

$$\mathsf{N}^d(\mathcal{G}) \simeq \mathsf{N}^T(\mathcal{G}) \simeq \mathsf{N}^{\mathfrak{R}}(\mathcal{G}) \quad \text{[\textit{Hinich}, 2015].}$$

- Demostrar que utilizando localización simplicial podemos transferir este resultado a toda categoría simplicial fibrante $\mathcal{C}$ con $\mathrm{h}\mathcal{C}$ un grupoide.

Modelos topológicos de infinito-grupoides

David Martínez Carpena

Supervisor: Carles Casacuberta

IX Encuentro de Jóvenes Topólogos

20 de octubre de 2021

Universitat de Barcelona