Recubridores en teoría homotópica de tipos

David Martínez Carpena (dvmcarpena@pm.me)

Universidad de Barcelona

XXVII Encuentro de Topología

Resumen

La teoría homotópica de tipos es una rama de las matemáticas originada en la década de 2010, que relaciona la teoría de tipos de Martin-Löf con el estudio de los ∞-grupoides. Sus elementos fundamentales son el axioma de univalencia de Voevodsky y los tipos inductivos de orden superior. Cualquier resultado en teoría homotópica de tipos puede ser formalizado mediante un asistente de demostraciones.
Los tipos inductivos de orden superior permiten definir tipos generados libremente por estructuras inspiradas en CW-complejos como la circunferencia, el toro o la botella de Klein. En este póster se definen los recubridores en teoría de tipos y se esboza una demostración de que el tipo de la botella de Klein admite un recubridor de dos hojas equivalente al toro.

Teoría homotópica de tipos

La teoría de tipos es un sistema deductivo basado en enunciados y reglas. Los posibles enunciados son:

$$A \text{ type} \qquad a : A \qquad a \equiv b \qquad A \equiv B$$

Los **tipos inductivos** son aquellos que pueden ser generados a partir de un conjunto de elementos y funciones. Por ejemplo, el tipo de los números naturales $\mathbb{N}$ con la construcción de Peano.

El **tipo de identidad** $a =_A b$ se comporta como un camino entre a y b, y se define como el tipo inductivo con generadores $\mathsf{refl}_a : a =_A a$ para cada $a : A$.

La estructura homotópica de la teoría de tipos surge cuando consideramos tipos identidad de otros tipos identidad, recursivamente. Cada tipo junto con la estructura de identidades que le corresponde tiene asociado un ∞-grupoide, único salvo homotopía.

Tipos inductivos de orden superior

Los **tipos inductivos de orden superior** son tipos inductivos con generadores basados en identidades de cualquier orden. Nos permiten generar libremente tipos con una estructura de orden superior inspirada por CW-complejos:

Circunferencia $\mathbb{S}^1$

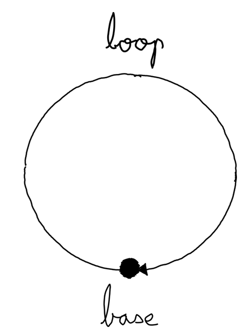
- $\mathsf{base} : \mathbb{S}^1$
- $\mathsf{loop} : \mathsf{base} = \mathsf{base}$

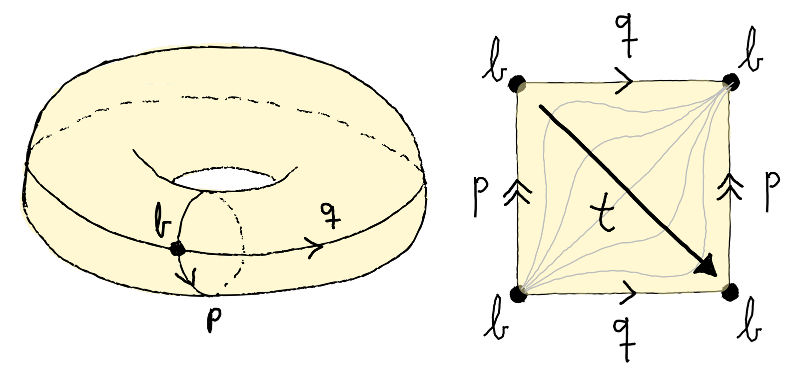
Toro $\mathbb{T}^2$

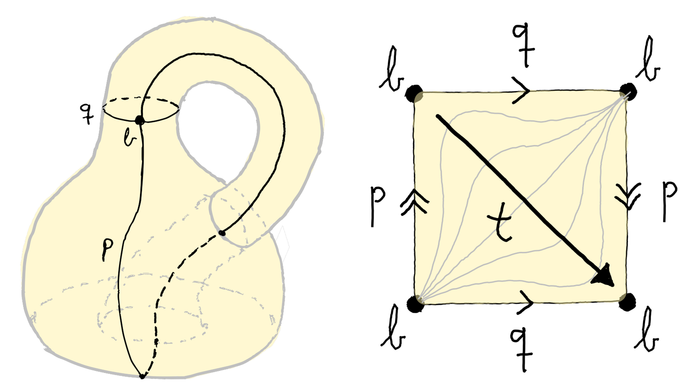
- $\mathsf{b} : \mathbb{T}^2$
- $\mathsf{p} : \mathsf{b} = \mathsf{b}$
- $\mathsf{q} : \mathsf{b} = \mathsf{b}$
- $\mathsf{t} : \mathsf{p} \cdot \mathsf{q} = \mathsf{q} \cdot \mathsf{p}$

Botella de Klein $\mathbb{K}$

- $\mathsf{b} : \mathbb{K}$
- $\mathsf{p} : \mathsf{b} = \mathsf{b}$
- $\mathsf{q} : \mathsf{b} = \mathsf{b}$
- $\mathsf{t} : \mathsf{p} \cdot \mathsf{q} = \mathsf{q} \cdot \mathsf{p}^{-1}$







En general, estos ejemplos de tipos inductivos de orden superior no tienen por qué tener las propiedades esperadas por sus versiones topológicas. El primer caso estudiado [4] fue el de $\mathbb{S}^1$, demostrando que tiene la estructura homotópica esperada. De manera similar, Sojakova [3] en 2016 demostró que $\mathbb{T}^2$ es equivalente al producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Recubridores

El objetivo de nuestra investigación [2] es comprobar que $\mathbb{K}$ también tiene la estructura homotópica esperada, demostrando que $\mathbb{K}$ admite un recubridor de dos hojas equivalente a $\mathbb{T}^2$. En 2015, Hou [1] definió los recubridores en teoría homotópica de tipos mediante la propiedad de que un recubridor es un fibrado con fibra discreta.

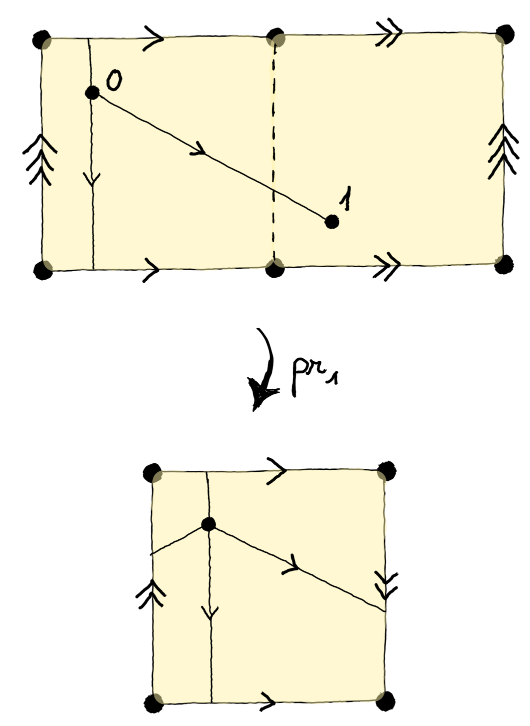
Un **espacio recubridor** P de un tipo A es una familia de conjuntos indizada por A, es decir, una familia $P : A \to \mathcal{S}et$.

Esta definición tiene sentido gracias a que toda familia de tipos tiene la propiedad de elevación de identidades, y por tanto se comporta como un fibrado. Dado un espacio recubridor P de A, el espacio total de este es el tipo $\sum_{x:A} P(x)$, la fibra en $a : A$ es $P(a)$ y el fibrado es $\mathrm{pr}_1 : \sum_{x:A} P(x) \to A$.

El recubridor de dos hojas

Definimos $\mathsf{flip} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ como la aplicación de univalencia a la equivalencia definida por el endomorfismo de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que envía 0 a 1 y 1 a 0. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathcal{S}et \\ \mathsf{b} &\longmapsto \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \mathsf{p} &\longmapsto \mathsf{flip} \\ \mathsf{q} &\longmapsto \mathsf{refl}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \\ \mathsf{t} &\longmapsto \mathsf{refl}_{\mathsf{flip}} \end{aligned}$$



Investigación futura

- Detallar la equivalencia entre el toro y $\sum_{x:\mathbb{K}} \mathcal{K}(x)$.
- Formalizar **orientablilidad** mediante recubridores.
- Implementar el resultado en un asistente de demostraciones, como Coq o Agda.

References

[1] Kuen-Bang Hou (Favonia). "Covering spaces in homotopy type theory". En: *Trends in Mathematics*. Springer, 2015. DOI: 10.1007/978-3-319-21284-5_15.

[2] David Martínez Carpena. "Teoria homotòpica de tipus". Director: Carles Casacuberta. Trabajo final de grado. Universitat de Barcelona, 2020. URL: http://hdl.handle.net/2445/165004.

[3] Kristina Sojakova. "The equivalence of the torus and the product of two circles in homotopy type theory". En: *ACM Transactions on Computational Logic*. Vol. 17. 4. 2016. DOI: 10.1145/2992783.

[4] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study, 2013. URL: https://homotopytypetheory.org/book/.